DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

I

On donne deux nombres réels positifs a_0 et b_0 (et on pourra supposer $a_0 > b_0$) à partir desquels on forme :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad b_1 = \sqrt{a_0\, b_0}$$

puis, en réitérant ce procédé, les deux suites :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$$

1° Établir les inégalités qui permettent de ranger les quatre nombres a_0, b_0, a_1, b_1, dans l'ordre croissant.

2° Sur un axe réel Ox on marque les points A_0, B_0, A_1, B_1 d'abscisses respectives a_0, b_0, a_1, b_1.

Quelles sont les propriétés géométriques de cette figure (on pourra introduire le cercle de diamètre A_0B_0 et le cercle de centre O passant par B_1).

3° Étudier la convergence de la suite a_n.

Étudier la convergence de la suite b_n.

4° Comparer la différence $a_{n+1} - b_{n+1}$ avec $a_n - b_n$: montrer que les suites a_n et b_n ont une limite commune $L(a_0, b_0)$.

Déterminer cette limite, si possible avec quatre décimales exactes lorsque $a_0 = 1$ et $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les candidats indiqueront de quelle table ou de quel autre moyen ils disposaient.

II

A la donnée de a_0 et b_0 on associe l'intégrale définie :

$$I(a_0, b_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}}$$

1° Donner de cette intégrale une minoration contenant a_0 seul, puis une majoration contenant b_0 seul.

2° Effectuer sur cette intégrale le changement de variable défini par :

$$x = \sin t$$

(On pourra introduire la constante positive c_0 définie par $a_0^2 = b_0^2 + c_0^2$)

3° Comme précédemment, on définit :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad b_1 = \sqrt{a_0 b_0} \qquad a_1^2 = b_1^2 + c_1^2$$

Étudier, sur le segment [0, 1] de la variable y, la fonction :

$$x = \frac{(a_1 + c_1)\, y}{a_1 + c_1 y^2}$$

Définir la fonction réciproque. Calculer $\frac{dx}{dy}$.

4° Effectuer sur l'intégrale $I(a_0, b_0)$ le changement de variable ainsi défini, de manière à l'exprimer au moyen des constantes a_1, b_1, c_1.

5° Donner de l'intégrale, des majorations et des minorations au moyen des suites a_n et b_n. En déduire la valeur de cette intégrale exprimée au moyen de la limite $L(a_0, b_0)$.

III

Dans un plan rapporté à des coordonnées polaires ρ, θ on considère la courbe d'équation :

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

1° Construire sommairement cette courbe. Étudier ses symétries.

grale portant sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la variable θ.

3° Effectuer sur cette intégrale le changement de variable défini par

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

4° Comparer la longueur totale de la courbe à celle du cercle de rayon a.

IV

L'étude faite en physique du pendule simple montre que son mouvement est régi par l'équation différentielle (exprimant le théoreme des forces vives) :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(\cos\theta - \cos\alpha)$$

On ne demande pas d'établir cette équation mais de l'admettre. t désigne le temps, θ l'élongation variable du pendule; α est une constante, l'amplitude, valeur maxima de l'élongation au cours du mouvement; l est une constante, la longueur du pendule; g est une constante, l'accélération de la pesanteur ($g = 981$ cm/sec²).

1° Calculer la durée $\frac{T}{2}$ du mouvement dans lequel l'élongation θ va constamment en croissant de $-\alpha$ à $+\alpha$: on l'exprimera au moyen d'une intégrale portant sur l'intervalle $[0, \alpha]$ de la variable.

2° Effectuer sur cette intégrale le changement de variable défini par :

$$\sin\frac{\theta}{2} = x \sin\frac{\alpha}{2}$$

et calculer T lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3° Exprimer T en fonction de α par l'intermédiaire de $L\left(1, \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Quelle est la limite de T lorsque α tend vers zéro?

Donner une valeur approchée de cette limite pour un pendule dont l longueur est $l = 100$ cm.

En utilisant les majorations et minorations rencontrées pour $L(a_0, b_0)$ donner un développement limité de T en fonction de α valable au troisième ordre près.